Verlässliche Echtzeitsysteme

Übungen zur Vorlesung

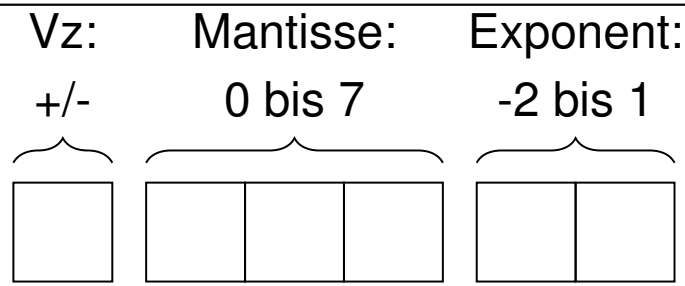
Festkommaarithmetik

Phillip Raffeck, Florian Schmaus, Simon Schuster

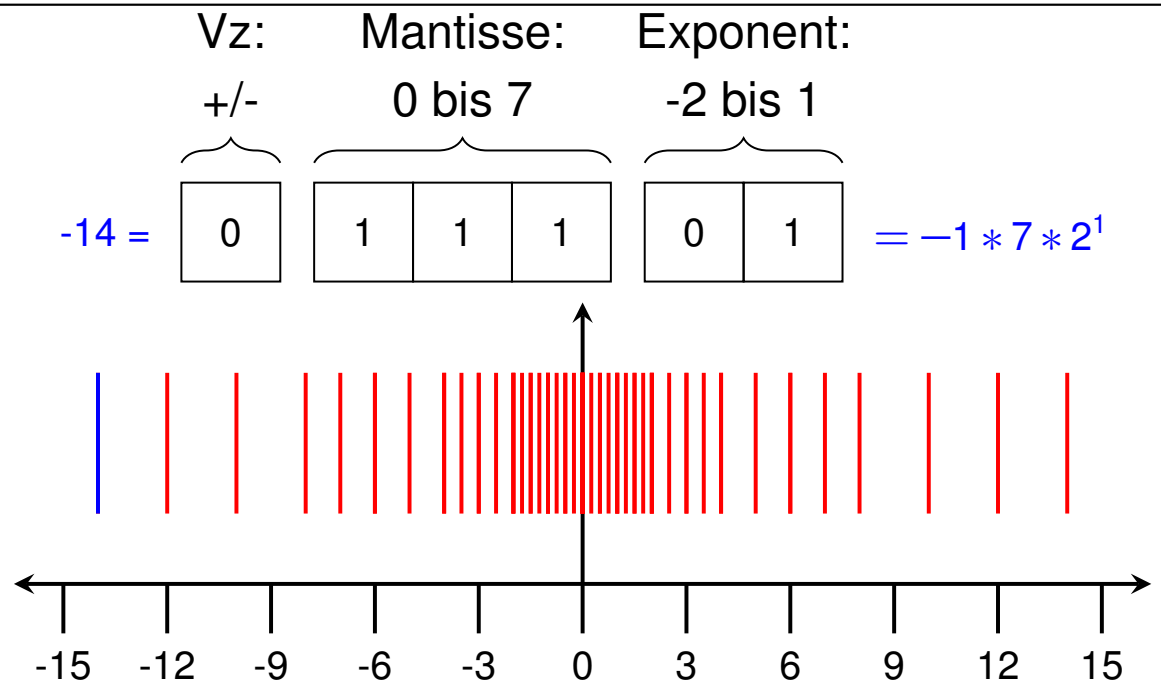
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl Informatik 4 (Verteilte Systeme und Betriebssysteme)
https://www4.cs.fau.de

Sommersemester 2020

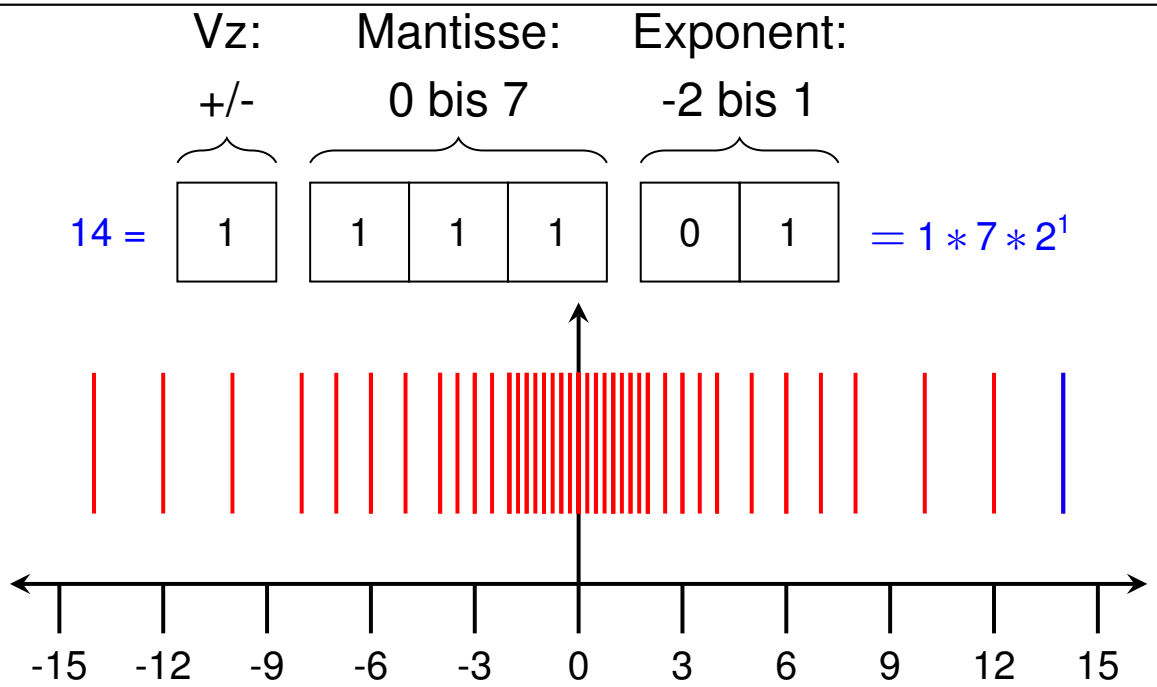
Fließkommazahlen



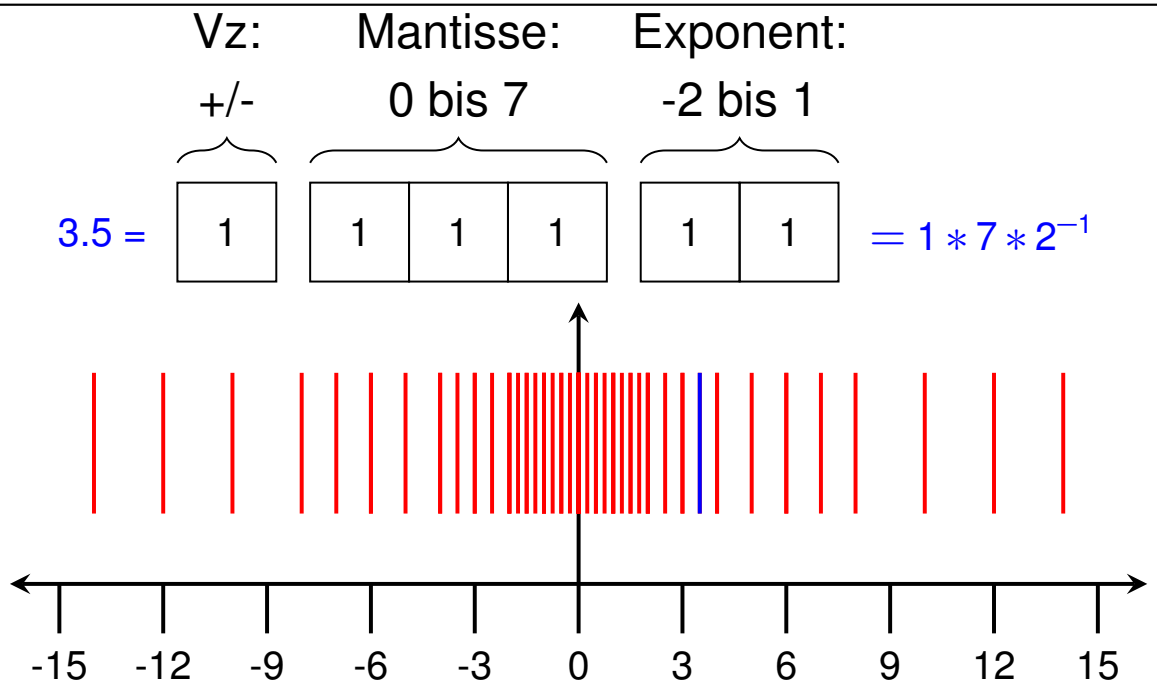
Fließkommazahlen



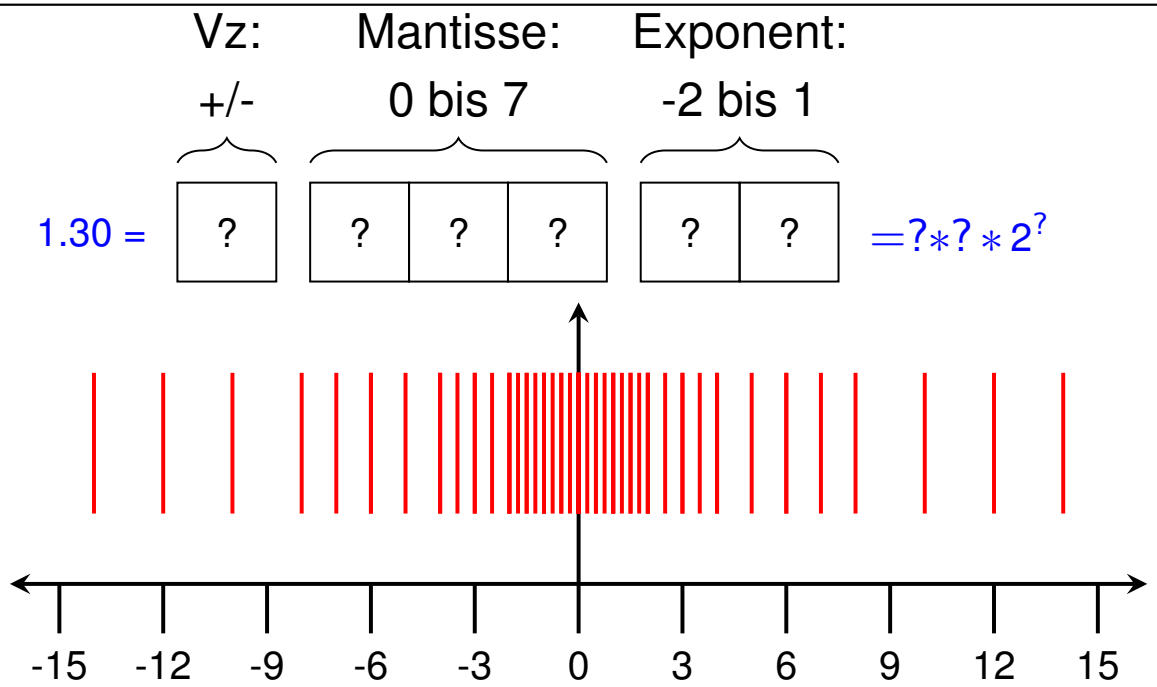
Fließkommazahlen



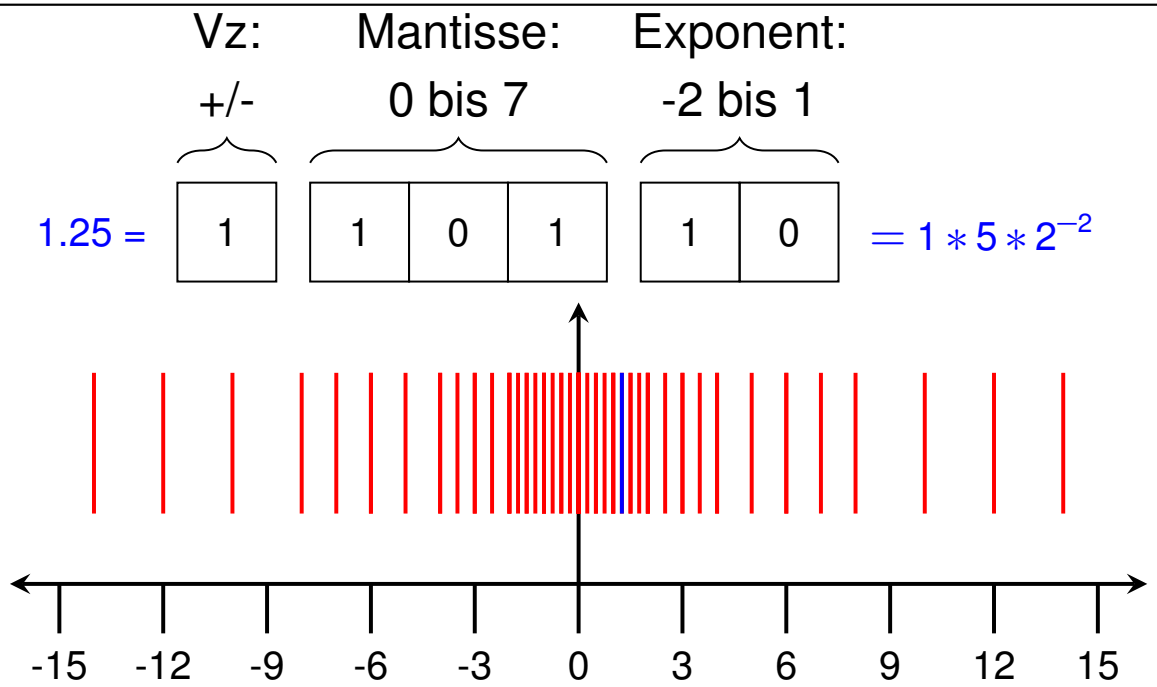
Fließkommazahlen



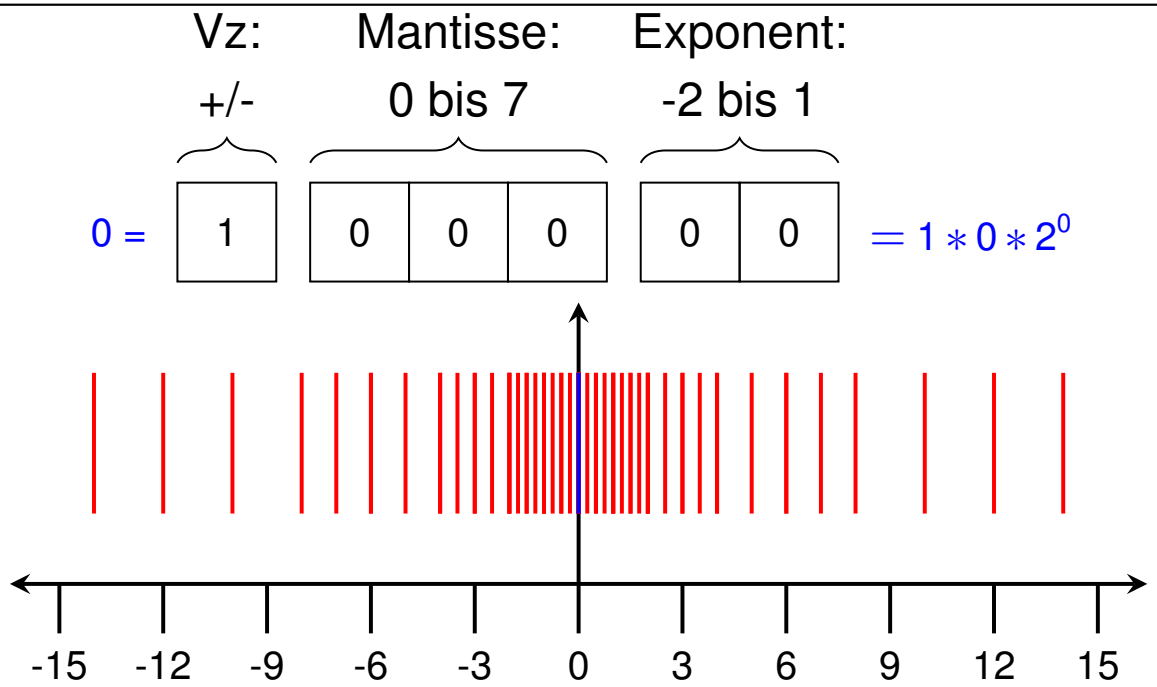
Fließkommazahlen



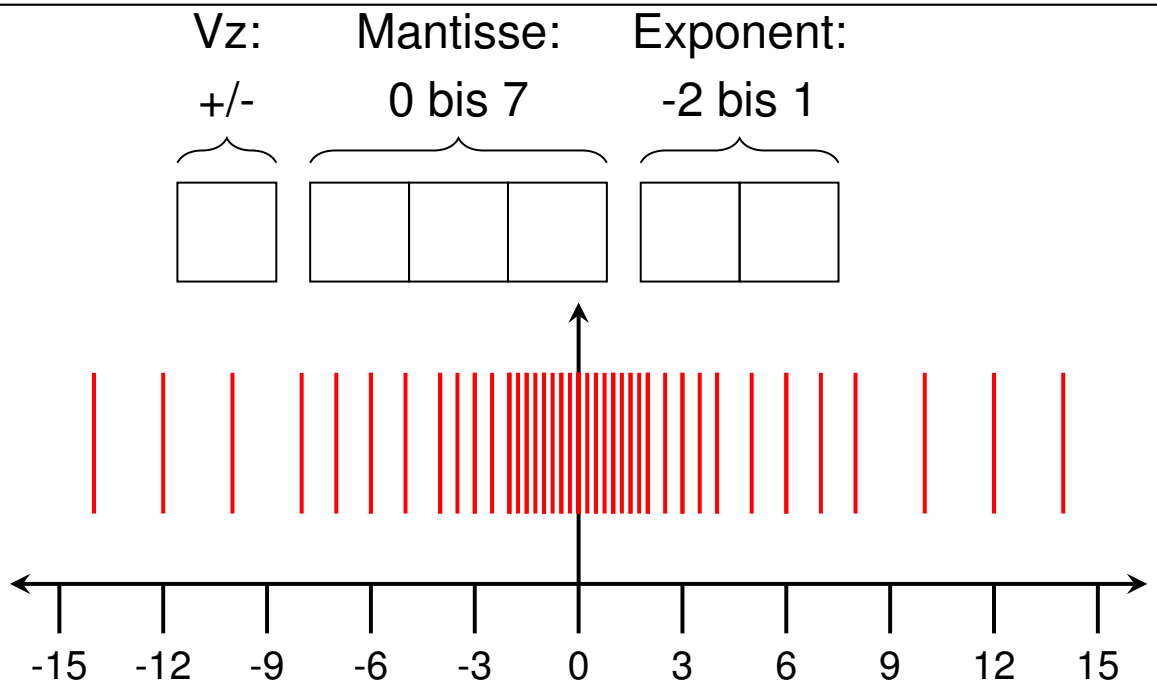
Fließkommazahlen



Fließkommazahlen



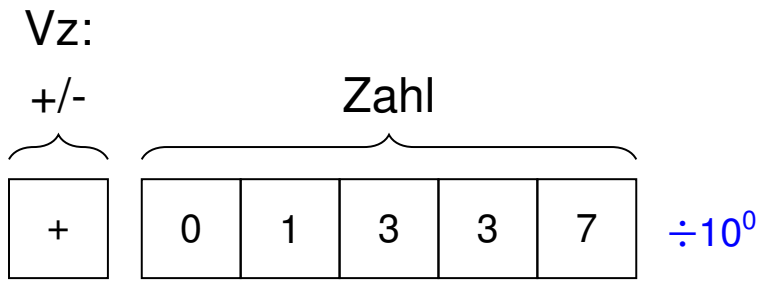
Fließkommazahlen



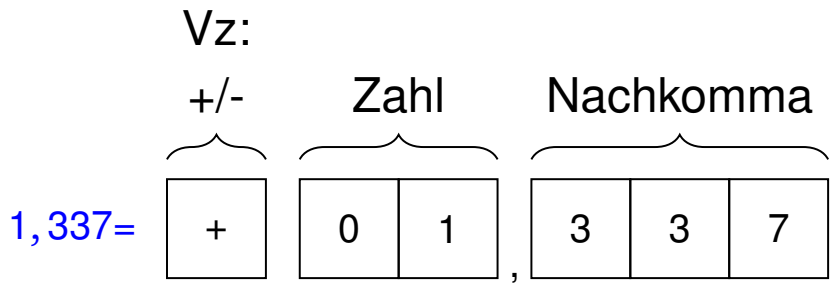
IEEE 754

- Noch komplexer:
  - normalisierte/denormalisierte Darstellung
  - Rundung, Fehlersemantik, ...
  - NaN, ∞, ...
- `https://ieeexplore.ieee.org/document/4610935/`

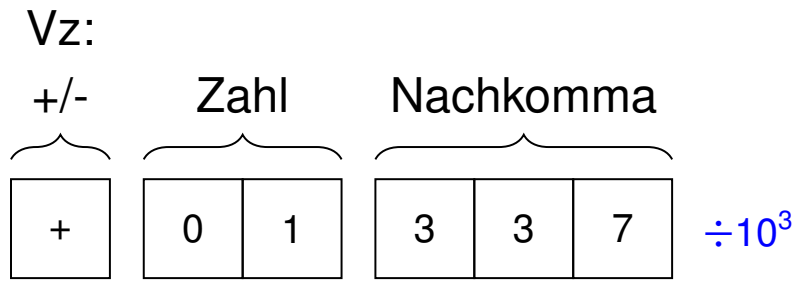
Festkommazahlen: Grundlagen



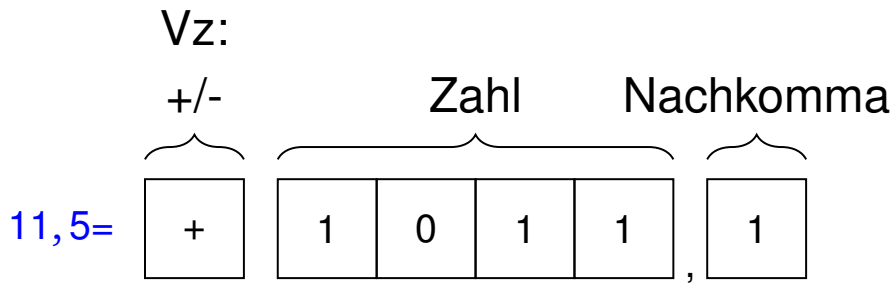
Festkommazahlen: Grundlagen



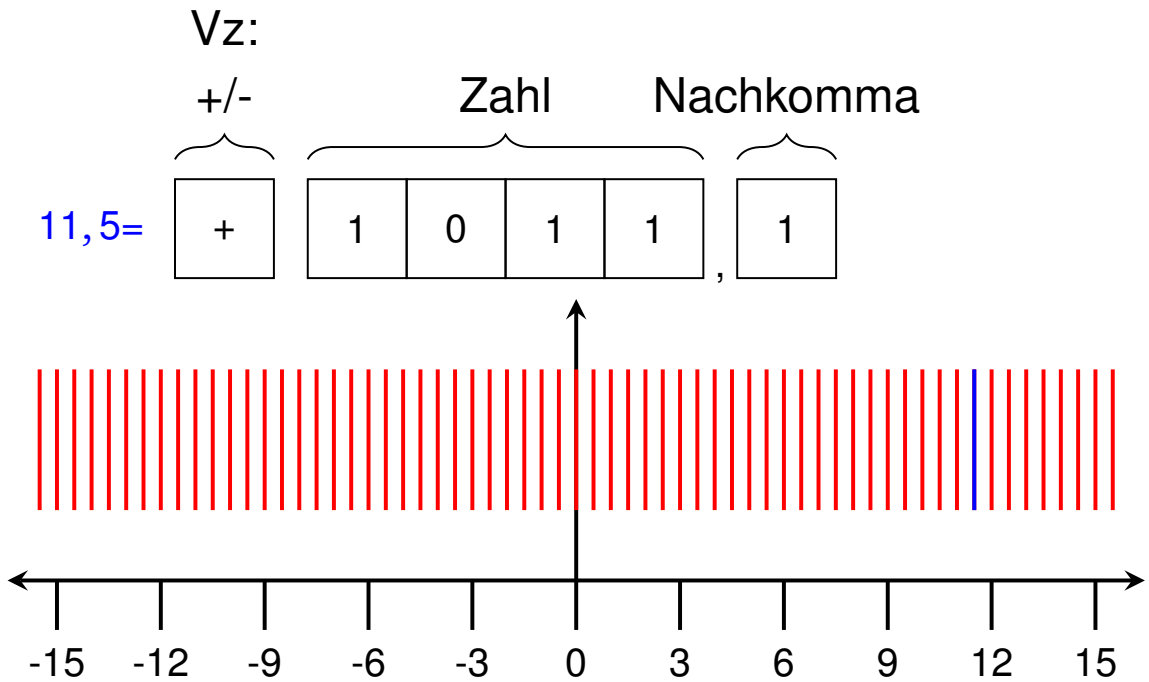
Festkommazahlen: Grundlagen



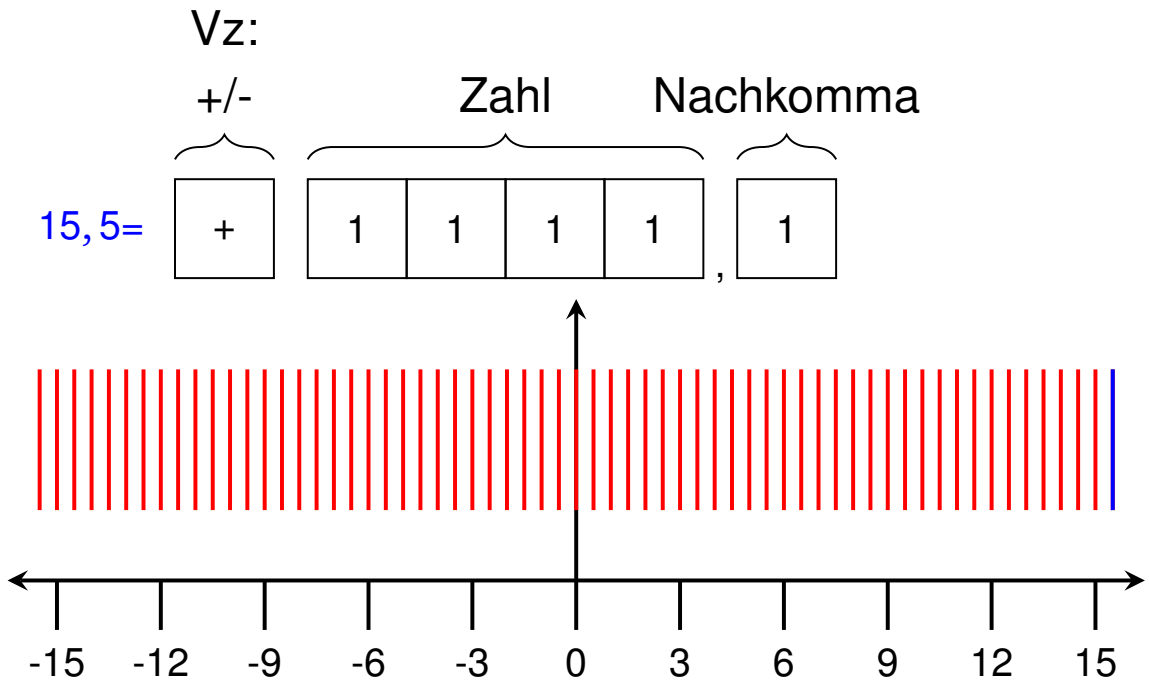
Festkommazahlen: Grundlagen



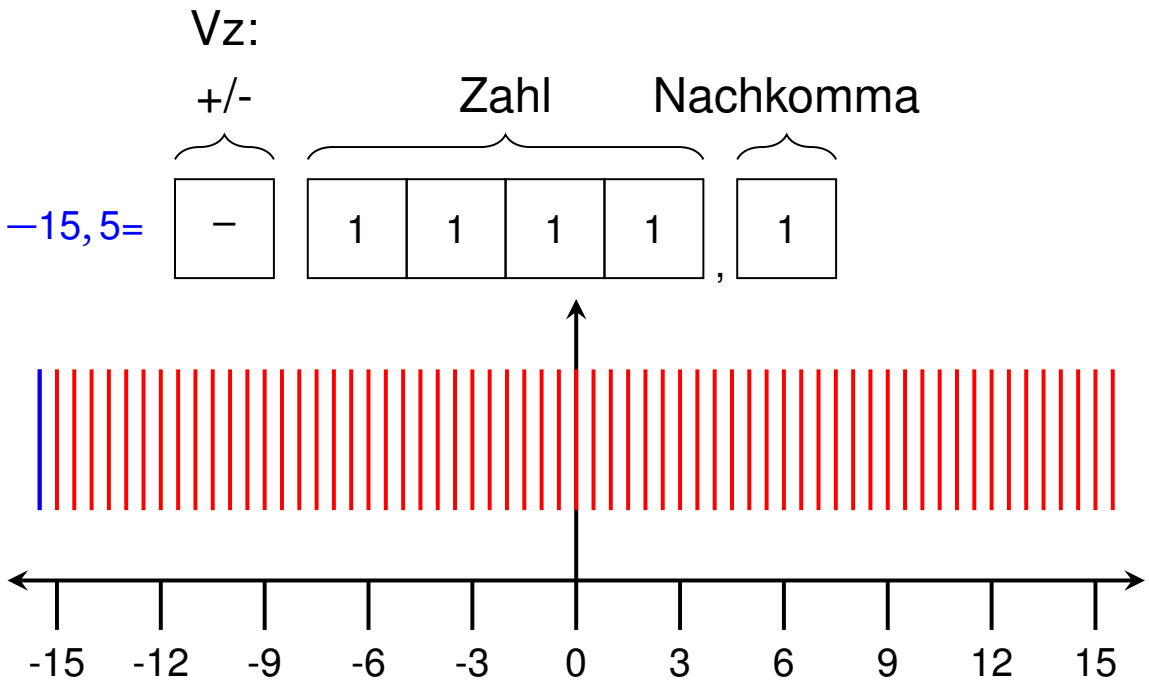
Festkommazahlen: Grundlagen



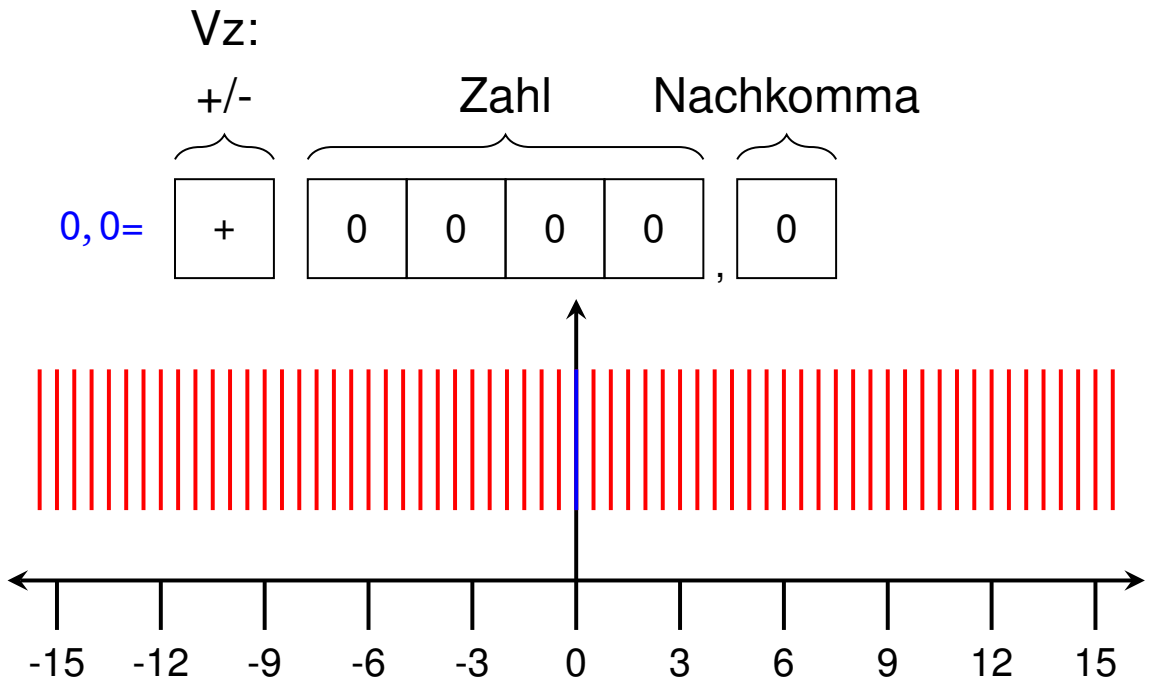
Festkommazahlen: Grundlagen



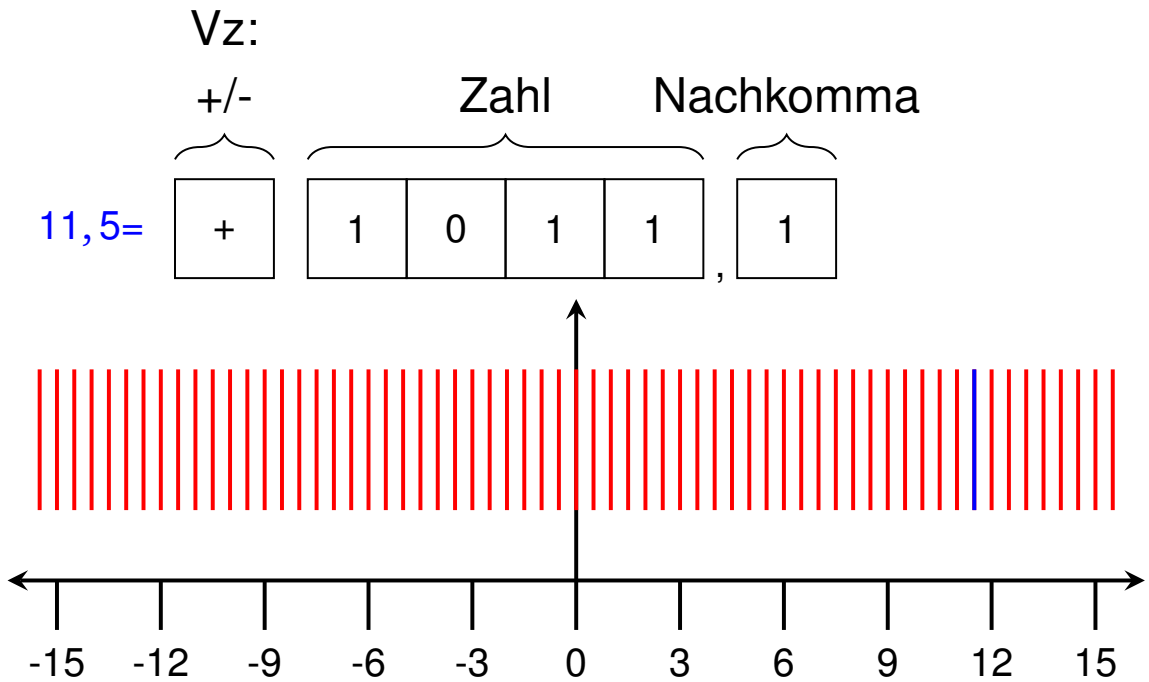
Festkommazahlen: Grundlagen



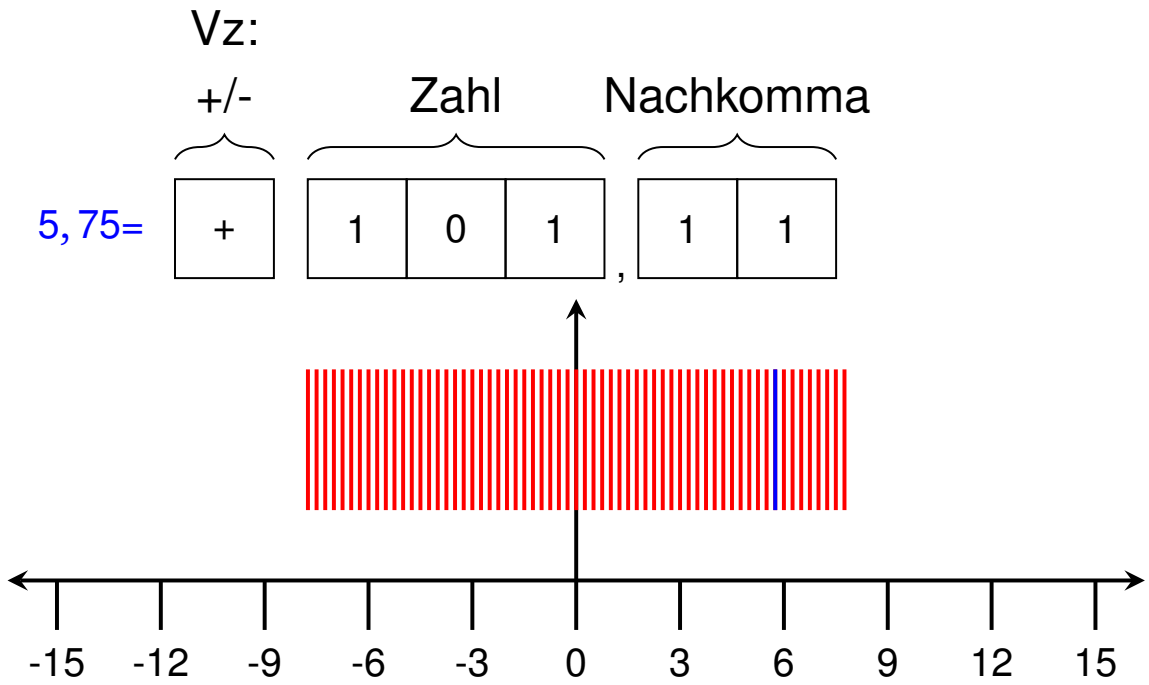
Festkommazahlen: Grundlagen



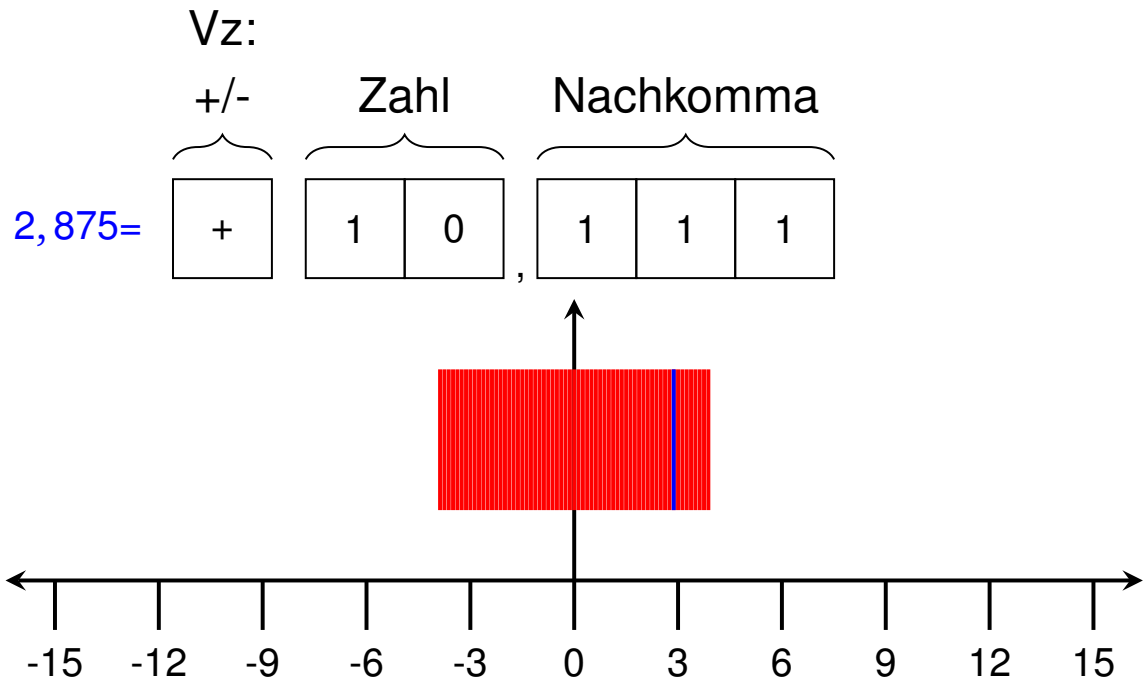
Festkommazahlen: Grundlagen



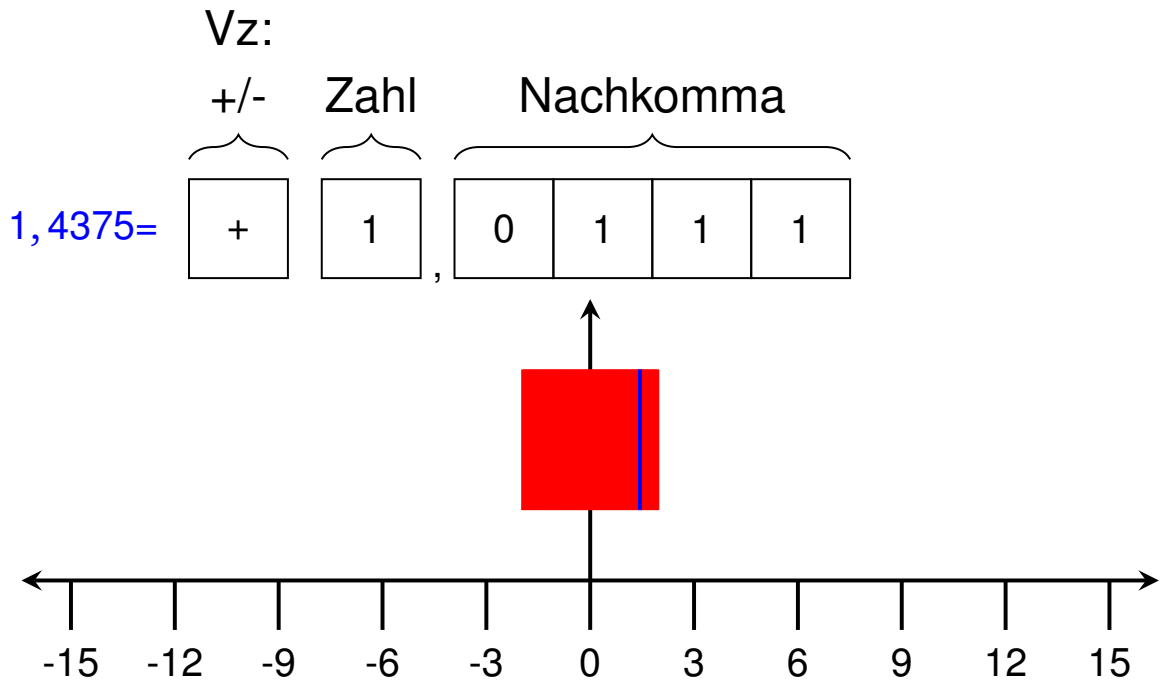
Festkommazahlen: Grundlagen



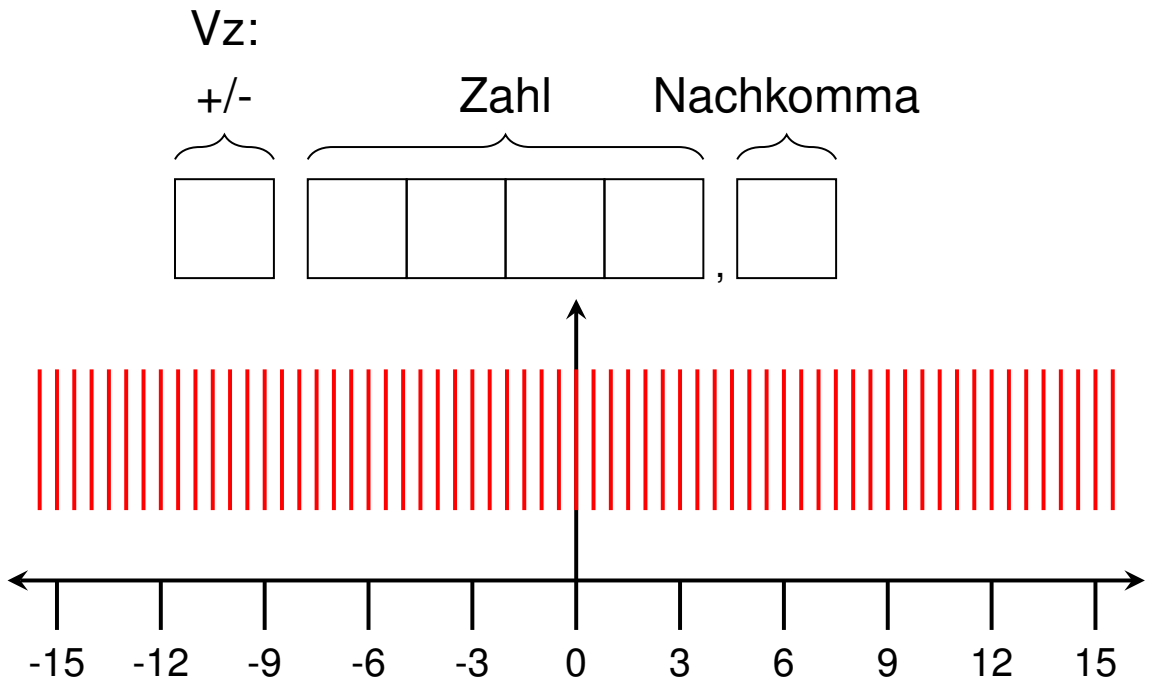
Festkommazahlen: Grundlagen



Festkommazahlen: Grundlagen



Festkommazahlen: Grundlagen



C-Standard und Zahlendarstellung

- Zahlendarstellung im Standard nicht festgelegt:
  - Einerkomplement
  - Vorzeichen und Magnitude
  - Zweierkomplement
- Heute meist Zweierkomplement $\rightsquigarrow$ kein dediziertes Vorzeichenbit

Festkommaarithmethik – Motivation

```c
float func(void){
  volatile float a = 23.42;
  volatile float b = 12.34;
  return a * b;
}
```

```
func:
  push  {r7, lr}
  sub   sp, #8
  add   r7, sp, #0
  ldr   r3, [pc, #28] ; float a
  str   r3, [r7, #4]
  ldr   r3, [pc, #28] ; float b
  str   r3, [r7, #0]
  ldr   r2, [r7, #4]
  ldr   r3, [r7, #0]
  adds  r0, r2, #0 ; Param 1
  adds  r1, r3, #0 ; Param 2
  bl    3a6c <__aeabi_fmul>
  adds  r3, r0, #0
  adds  r0, r3, #0
  mov   sp, r7
  add   sp, #8
  pop   {r7, pc}
```

- Setup
  - Plattform: ARM Cortex-M0+
  - Compiler: arm-gcc
- Funktion `__aeabi_fmul` : 300 Zeilen Assembler
- Keine Fließkommaeinheit (engl. floating-point unit, FPU) vorhanden
- Emulation der **Fließkommaarithmetik in Software**

Festkommaarithmetik – Q-Notation

- Mikrocontroller ohne *Fließkommaeinheit*
- *Kein EAN* für Fließkommazahlen

  ⇝ *Festkommaarithmethik* mit Ganzzahlen
- Zahlenformat häufig in Q-Notation [1] angegeben
- *Qm.n* ⇝ Festkommazahl mit
  - m Bit vor dem Komma, n nach dem Komma, ein Vorzeichenbit
  - Wertebereich: $[-2^m, 2^m - 2^{-n}]$
  - Auflösung: 2^{-n}
- Implementierung für Übungsaufgabe *vorgegeben*

Implementierung als Integer

⇝ passendes Q-Format ist **anwendungsspezifisch**

Q-Notation – Beziehung zu Fließkommazahlen

von Fließkomma nach Qm.n

1. Multiplikation mit 2^n
2. Runden auf die nächste Ganzzahl

von Qm.n nach Fließkomma

1. Umwandlung in Fließkommazahl $\rightsquigarrow$ cast
2. Multiplikation mit 2^{-n}

Operationen – Addition/Subtraktion

- Addition und Subtraktion wie bei Ganzzahlen

Addition

```
1 int32_t      a = ...;
2 int32_t      b = ...;
3 int32_t result = a + b;
```

```
    2 , 8 0
+ 1 3 , 3 7
  (1)
= 1 6 , 1 7
```

Subtraktion

```
1 int32_t      a = ...;
2 int32_t      b = ...;
3 int32_t result = a - b;
```

```
    1 6 , 1 7
-     2 , 8 0
    (1)
= 1 3 , 3 7
```

Operationen – Multiplikation/Division

- Braucht Zwischenergebnis von doppelter Bitbreite

Multiplikation

```
1 #define K    (1 << (n - 1))
2 int32_t      a = ...;
3 int32_t      b = ...;
4 int64_t  temp = (int64_t) a * (int64_t) b;
5          temp += K;
6 int32_t  result= temp >> n;
```

$$
\begin{aligned}
& a \cdot b \\
\overset{Q.n}{=} & (a \cdot 10^n) \cdot (b \cdot 10^n) \\
= & (a \cdot b) \cdot 10^{2n} \\
\neq & (a \cdot b) \cdot 10^n
\end{aligned}
$$

Division

```
1 int32_t       a = ...;
2 int32_t       b = ...;
3 int64_t    temp = (int64_t) a << n;
4            temp += b / 2;
5 int32_t  result = temp / b;
```

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} & \overset{Q.n}{=} \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} \\
= & \frac{a}{b} \neq \frac{a}{b} \cdot 10^n
\end{aligned}
$$

- Siehe Implementierung in `fixedpoint.c`
- Vorsicht: Rundungsfehler durch Transformationen

Literatur I

Erick L. Oberstar.
Fixed-point representation & fractional math.
Technical report, Oberstar Consulting, August 2007.